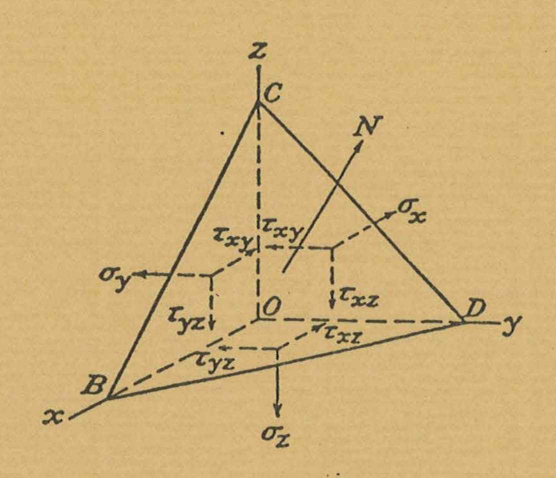
NOCIONES DE
ELASTICIDAD
APLICADA

por

LUIS SAN SALVADOR AGEO



CUADERNOS DE *APOYO*
A LA DOCENCIA DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA DE
MADRID

NOCIONES DE ELASTICIDAD APLICADA

Introducción

Todos los materiales estructurales presentan en cierto grado la propiedad de *elasticidad*, es decir, si las fuerzas exteriores que deforman la estructura no rebasan un cierto límite, la deformación desaparece cuando se suprimen tales fuerzas. En lo que sigue se supondrá que los cuerpos que sufren la acción de las fuerzas exteriores son *perfectamente elásticos*, es decir, recuperan su forma inicial después de suprimir las fuerzas.

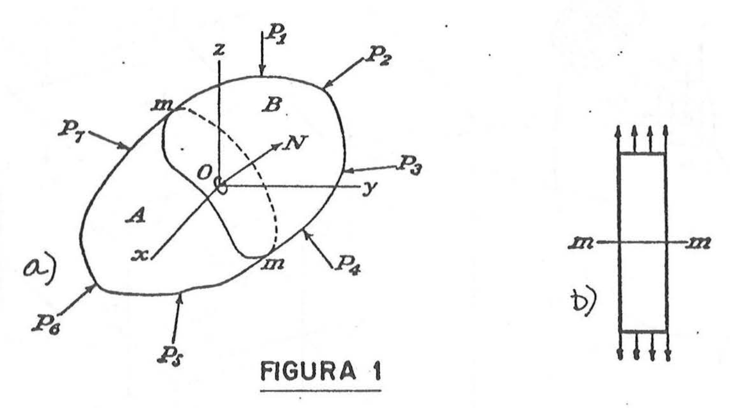


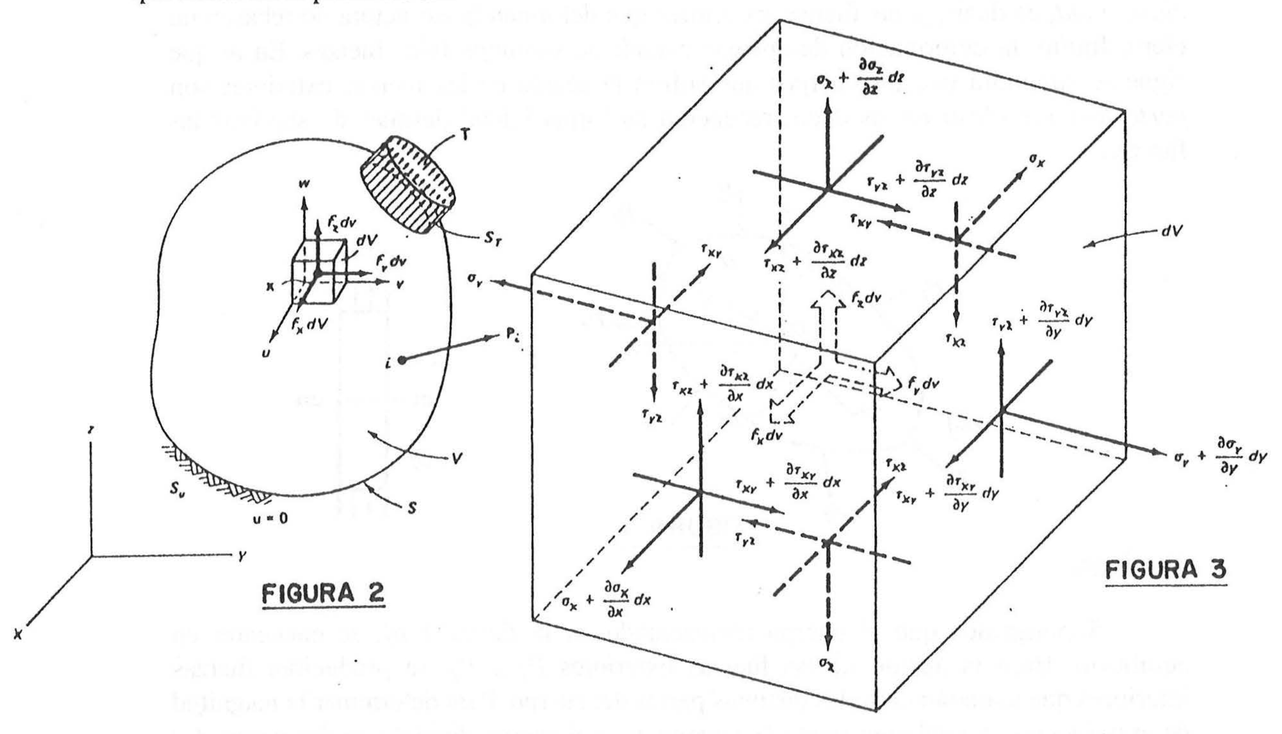
FIGURA 1

Tensiones

Supongamos que el cuerpo representado en la *figura 1 a)*, se encuentra en equilibrio. Bajo la acción de las fuerzas exteriores $P_1,....,P_7$, se producirán fuerzas interiores que actuarán entre las distintas partes del cuerpo. Para determinar la magnitud de esas fuerzas en cualquier punto *O*, supongamos al cuerpo dividido en dos partes *A* y *B* mediante la sección plana *mm*, que contiene a dicho punto. Si consideramos una de esas regiones, por ejemplo, la *A*, se puede establecer que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores $P_5....,P_7$ y las fuerzas interiores, repartidas en la sección *mm*, que representan la acción del material de la región *B* sobre el material de la región *A*. Se supondrá que estas fuerzas se distribuyen con continuidad en la sección *mm*, de la misma forma que la presión hidrostática o la presión del viento se distribuyen de forma continua en la superficie sobre la que actúan. La magnitud de tales fuerzas se define generalmente por su *intensidad*, o sea, por la fuerza que actúa sobre el área unidad. Cuando se trata de fuerzas interiores, a la intensidad se le llama tensión. En el caso sencillo de una barra prismática sometida a tracción bajo la acción de fuerzas distribuidas uniformemente sobre sus extremos (*fig. 1 b)*) las fuerzas interiores se distribuyen también uniformemente sobre cualquier sección plana *mm*. En consecuencia, la intensidad de esta distribución, la tensión, puede obtenerse dividiendo la fuerza *P* por el área *A* de la sección recta.

En el caso que acabamos de considerar, la tensión era uniforme en toda la sección recta. En el caso general de la figura 1 a), la tensión no se distribuye uniformemente en *mm*. Para obtener la magnitud de la tensión que actúa sobre el pequeño elemento de área δA, que comprende al punto *O*, suponemos que las fuerzas que actúan a través de este área elemental, debidas a la acción del material de la parte *B* sobre el material de la parte *A*, se reducen a una resultante *P*. Si el área δA disminuye con continuidad, el valor límite del cociente $\delta P/\delta A$ nos da la magnitud de la tensión,

que actúa sobre la sección *mm* en el punto *O*. La dirección que tiene δP en el límite, es la dirección de la tensión. En general, la tensión está inclinada respecto al elemento de superficie δA sobre el cual actúa, descomponiéndose entonces en sus dos componentes : una *tensión normal*, perpendicular al elemento δA y una *tensión tangencial o cortante*, que actúa en el plano de δA.



Notaciones correspondientes a las fuerzas y a las tensiones.

En la figura 2 se da una representación de las fuerzas exteriores que pueden actuar sobre un cuerpo : a) fuerzas distribuidas sobre la superficie del cuerpo "T", tales como la presión hidrostática, las sobrecargas repartidas sobre un forjado etc. b) fuerzas distribuidas sobre el volumen de un cuerpo "f", como son las gravitatorias, las de inercia etc. c) fuerzas puntuales "P" sobre la superficie del cuerpo en cuestión.

En la figura 3 se representa un cubo elemental extraído del sólido de que estamos hablando. En cada una de sus caras se indican las tensiones a que están sometidas. Utilizamos la letra "σ" para designar la tensión normal y la letra "τ" para la tensión tangencial. En el caso de la tensión normal "σ", para indicar el plano sobre el que actúa, añadimos un subíndice que indica el eje de coordenadas perpendicular a ese plano. En el caso de la tensión tangencial "τ" el primer subíndice indica, como en el caso anterior, el eje de coordenadas perpendicular al plano de que se trate, y el segundo, la dirección de la tensión. Como puede verse en la *figura 3*, la tensión tangencial se descompone en dos, paralelas a los ejes de coordenadas.

Como tensiones normales positivas se eligen las que, aplicadas en caras opuestas del cubo elemental, dan lugar a una tracción y como negativas las que generan compresiones. En el caso de las tensiones tangenciales no es fácil encontrar una regla sencilla para asignar su signo, así que elegimos de modo arbitrario un sentido positivo

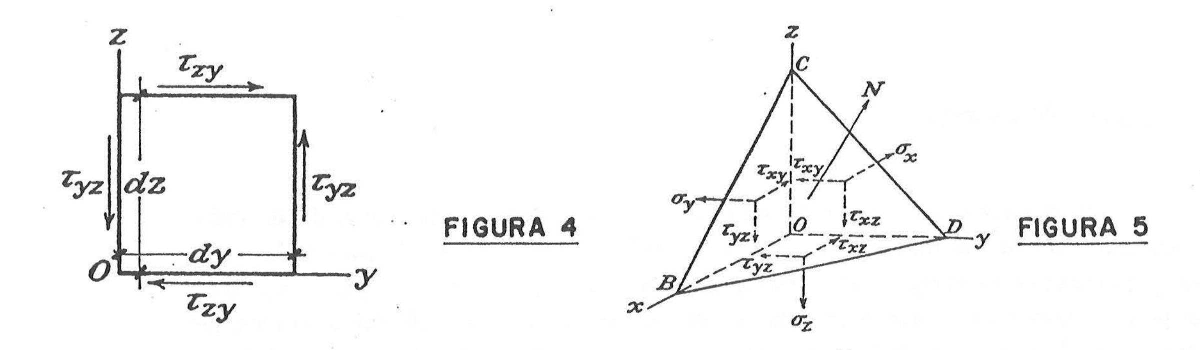


FIGURA 4

FIGURA 5

a cada *par* de acciones tangenciales actuando en las caras opuestas del cubo elemental. En la *figura 3* se muestran las diferentes σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}... con los sentidos que vamos a considerar positivos en nuestro trabajo. Obsérvese que en caras opuestas del cubo, las tensiones tienen sentidos opuestos. Esto es siempre así, no puede ser de otro modo, si queremos garantizar el equilibrio del cuerpo en todo momento. Además, si consideramos el equilibrio de momentos alrededor del eje *x* por ejemplo (*figura 4*), $\tau_{zy}dydxdz - \tau_{yz}dxdzdy = 0$, de donde se deduce que $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ y analogamente, tomando momentos respecto a los ejes *z* e *y* obtenemos $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. En la *figura 3* se ha tenido en cuenta esta realidad y en lo que sigue seguiremos haciéndolo así.

Ecuaciones de equilibrio

Consideremos ahora el equilibrio del volumen elemental de la *figura 3*. Aplicándole las ecuaciones de la estática, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$, obtenemos las tres ecuaciones de equilibrio (1). A continuación se desarrolla en detalle la obtención de la primera de esas ecuaciones, igualando a cero la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cubo en la dirección del eje *y* . Las otras dos se obtienen de modo semejante sin más que igualar a cero la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cubo en las direcciones *x* y *z* :

$$\Sigma F_y = 0 = (\tau_{xy}+(\partial\tau_{xy}/\partial x)dx)dydz - \tau_{xy}dydz + (\sigma_y+(\partial\sigma_y/\partial y)dy)dxdz - \sigma_y dxdz +$$
$$(\tau_{yz}+(\partial\tau_{yz}/\partial z)dz)dxdy - \tau_{yz}dxdy + f_y dxdy = 0 \rightarrow \quad \underline{\partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial z + f_y = 0}\ ;$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z + f_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + f_y = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow \partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + f_y = 0$$

Así pues, la distribución de tensiones en un cuerpo estará dada, en cada punto, por los valores de $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$, componentes de un *tensor de tensiones* que en general no serán constantes y variaran de un punto a otro, según el valor que tomen unas funciones de las coordenadas de un punto en cada punto. Estas funciones no podrán ser arbitrarias. Tendrán que cumplir, además de otras condiciones, como veremos más adelante, las ecuaciones de equilibrio. Así, por ejemplo una distribución de tensiones en un cuerpo en la que $\sigma_x = a_1$; $\sigma_y = a_2$; $\tau_{xy} = a_3$ siendo a_1, a_2 y a_3 constantes, es posible. También $\sigma_x = a_1 + a_2 y$; $\sigma_y = a_3 + a_4 x$; $\tau_{xy} = a_5$ da lugar a un posible estado tensional, sin embargo $\sigma_x = a_1 + a_2 x$; $\sigma_y = a_3 + a_4 y$; $\tau_{xy} = a_5$ no es posible pues no cumple al menos la primera ecuación de equilibrio.

Condiciones de contorno

Hemos visto como las tensiones que actúan sobre las seis caras de un cubo elemental vienen definidas por las seis componentes de la tensión: las tres componentes normales σ_x, σ_y, σ_z y las tres tangenciales $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Si en un punto cualquiera, se conocen estas componentes, podremos calcular mediante las ecuaciones de la estática la tensión que actúa sobre un plano de orientación arbitraria que pase por ese punto. Sea *O* un punto del cuerpo cargado y supongamos que se conocen las tensiones que actúan sobre los planos de coordenadas xy, xz, yz (*figura 5*). Para determinar la tensión que actúa en otro plano cualquiera que pasa por *O*, tracemos a distancia muy pequeña de ese punto, el plano *BCD* paralelo al dado, el cual formará con los planos coordenados un tetraedro elemental, *BCDO*. Como, según se ha supuesto, las tensiones varían de manera continua en todo el volumen del cuerpo la que actúa sobre el plano *BCD*, al acercarse éste al origen cuando el elemento se hace infinitésimo, tenderá a un límite, que es la tensión correspondiente al plano paralelo por el punto *O*.

Al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro elemental se podrán despreciar las fuerzas másicas y dejar de lado la variación de la tensión en las caras del elemento, por ser ambas de orden infinitesimal en comparación con las que actúan sobre las caras del tetraedro, y suponer una distribución uniforme de tensiones, de forma que las fuerzas que actúan sobre el tetraedro se determinarán multiplicando las áreas de sus caras por las respectivas componentes de la tensión. Si con *A* denotamos el área de la cara *BCD* las áreas de las otras caras se obtienen proyectando *A* sobre los tres planos coordenados.

Si es *N* la normal al plano *BCD* y escribimos: $\cos(Nx) = n_x$, $\cos(Ny) = n_y$, $\cos(Nz) = n_z$, las áreas de las otras tres caras del tetraedro serán An_x, An_y y An_z.

Sean T_x, T_y y T_z las componentes de la tensión que actúan en la cara *BCD*, paralelas a los ejes coordenados respectivos. La componente según la dirección *x* de la fuerza que obra sobre dicha cara será AT_x y las componentes de las fuerzas que actúan sobre las otras tres caras del tetraedro, en la misma dirección serán $-An_x\sigma_x$, $-An_y\tau_{xy}$, $-An_z\tau_{xz}$, de manera que tendremos la siguiente ecuación de equilibrio del tetraedro : $T_xA - \sigma_x n_x A - \tau_{xy} n_y A - \tau_{xz} n_z A = 0$. De manera análoga, es decir, proyectando las fuerzas sobre los ejes *z* e *y* se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y dividiendo luego ambos miembros de cada ecuación por el factor *A*, podremos escribir :

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{xz} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= T_z \end{aligned} \qquad (2)$$

que en forma matricial se escribe :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{vmatrix}$$

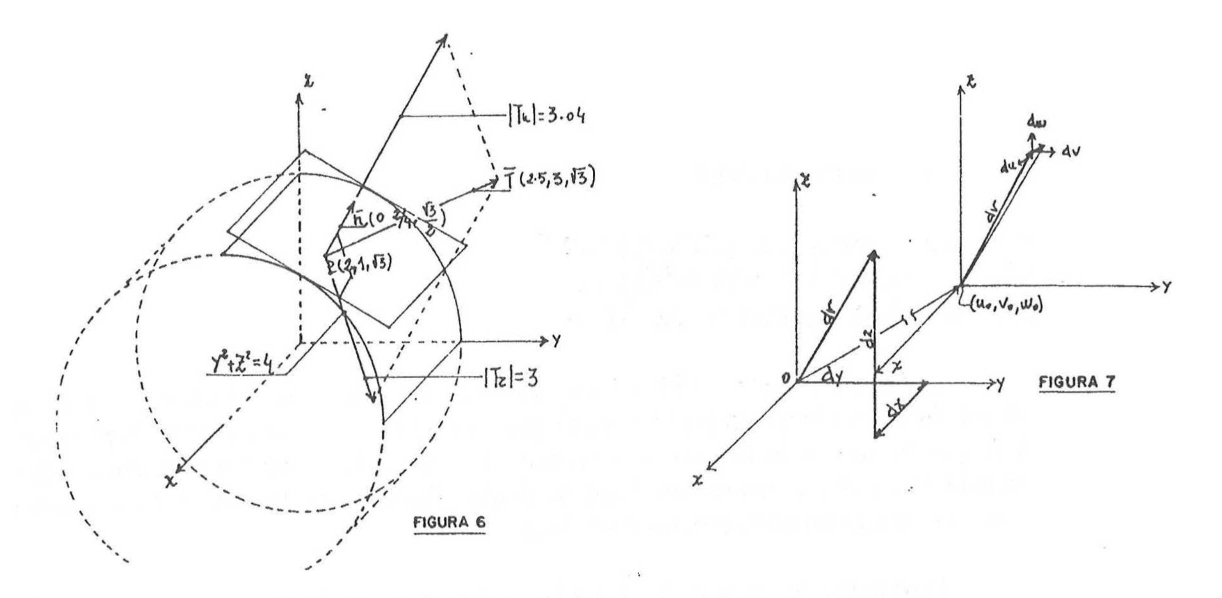


FIGURA 6

FIGURA 7

Ejemplo : El estado de tensiones en un cuerpo está dado por : $\sigma_x = 3xy$; $\tau_{xy}=5y^2$; $\tau_{yz} = 2z$; $\sigma_y = 0$. Determinar las componentes del vector tensión en el punto $P(2,1,\surd 3)$ normal al plano tangente a la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 4$ (*figura 6*).

La matriz de las componentes del tensor de tensiones en el punto P es :

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\surd 3 \\ 0 & 2\surd 3 & 0 \end{vmatrix}$$

y las componentes de una normal a la superficie cilíndrica en ese punto son las del gradiente en P :

$$\nabla(y^2+z^2-4) = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\surd 3\mathbf{k}$$

El módulo de esa normal será $\sqrt{(4+12)} = 4$; de donde se deduce que un vector unitario $\mathbf{n} = 2/4\mathbf{j} + \frac{1}{2}\surd 3\mathbf{k}$;

Y las componentes del vector tensión en P perpendicular a la superficie vendrán dadas por las ecuaciones (2) aplicadas en ese punto.

$$\begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\surd 3 \\ 0 & 2\surd 3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \surd 3/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.5 \\ 3 \\ \surd 3 \end{vmatrix}$$

Deformaciones

Para estudiar la deformación en la vecindad de un punto O de un cuerpo deformado (*figura 7*) consideremos un pequeño elemento lineal dr partiendo de ese punto, de componentes dx, dy, dz. Si O se mueve al lugar u_o, v_o, w_o el extremo de dr se moverá a :

$$\begin{aligned} u &= u_o + (\partial u/\partial x)dx + (\partial u/\partial y)dy + (\partial u/\partial z)dz \\ v &= v_o + (\partial v/\partial x)dx + (\partial v/\partial y)dy + (\partial v/\partial z)dz \qquad (3) \\ w &= w_o + (\partial w/\partial x)dx + (\partial w/\partial y)dy + (\partial w/\partial z)dz \end{aligned}$$

Y en forma matricial :

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\partial u/\partial x) & (\partial u/\partial y) & (\partial u/\partial z) \\ (\partial v/\partial x) & (\partial v/\partial y) & (\partial v/\partial z) \\ (\partial w/\partial x) & (\partial w/\partial y) & (\partial w/\partial z) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

Escribiremos las ecuaciones anteriores de un modo que ponga en evidencia, dentro del movimiento del punto, la parte que corresponde a hacerlo como *sólido rígido* y la que da lugar a la deformación propiamente dicha. Hay que tener en cuenta que cuando un cuerpo se mueve sin desplazamiento relativo entre sus puntos (*movimiento como sólido rígido*) no se producen tensiones.

Pero antes de escribir de nuevo las ecuaciones constataremos con un ejemplo que toda matriz puede descomponerse en la suma de una simétrica y otra antisimétrica . El ejemplo muestra también la mecánica de como obtener esa descomposición:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (2+4)/2 & (3+7)/2 \\ (4+2)/2 & 5 & (6+8)/2 \\ (7+3)/2 & (8+6)/2 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & (2-4)/2 & (3-7)/2 \\ (4-2)/2 & 0 & (6-8)/2 \\ (7-3)/2 & (8-6)/2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

A continuación descomponemos las ecuaciones (3) al modo como lo hemos hecho en el ejemplo numérico y a continuación analizaremos los distintos términos del resultado:

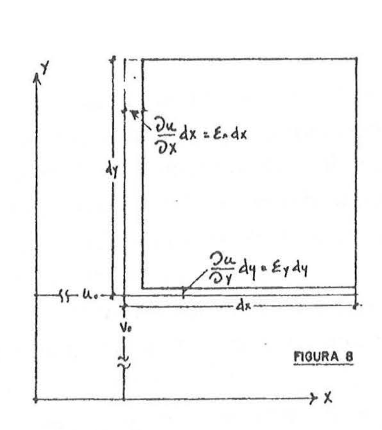
$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\partial u/\partial x) & (\partial u/\partial y) & (\partial u/\partial z) \\ (\partial v/\partial x) & (\partial v/\partial y) & (\partial v/\partial z) \\ (\partial w/\partial x) & (\partial w/\partial y) & (\partial w/\partial z) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} =$$

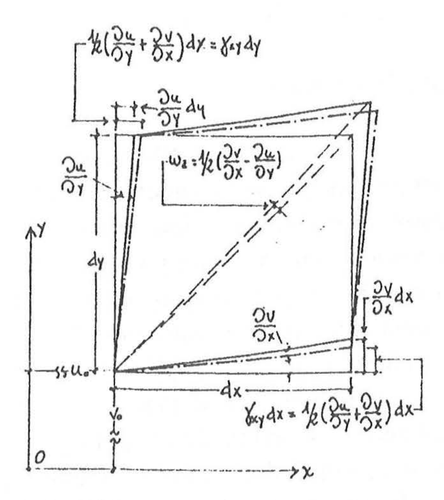
$$\begin{vmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x) & \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial z+\partial w/\partial x) \\ \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial x+\partial u/\partial y) & \partial v/\partial y & \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial z+\partial w/\partial y) \\ \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial x+\partial u/\partial z) & \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z) & \partial w/\partial z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial y-\partial v/\partial x) & \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial z-\partial w/\partial x) \\ \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial x-\partial u/\partial y) & 0 & \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial z-\partial w/\partial y) \\ \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial x-\partial u/\partial z) & \tfrac{1}{2}(\partial w/\partial y-\partial v/\partial z) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

Ponemos, a continuación esas expresiones de forma que expresan el carácter del movimiento alrededor del punto *O* : $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$ (deformación unitaria en la dirección *x*), $\gamma_{xy} = \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x)$ (deformación transversal en el plano *xy*), $w_y = \tfrac{1}{2}(\partial u/\partial z-\partial w/\partial x)$ (giro del elemento alrededor del eje y) etc.

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & dx \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} & dy \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z & dz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & w_z & w_y \\ -w_z & 0 & w_x \\ -w_y & -w_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \quad (3)$$





En la *figura 8* que representa un corte del sólido elemental por un plano paralelo al *xy* se muestra con detalle el significado de las componentes de las distintas matrices. Se ha representado en *a*) el significado de ε_x y ε_y y en *b*) el de γ_{xy} y w_z. Las dos figuras corresponden al mismo elemento. La deformación total es la suma de ambas y se han separado para que quede más clara su representación gráfica. Queda claro que el punto *O* se traslada según un vector u_o, v_o, w_o. Alrededor de *O* tiene lugar, además, un giro caracterizado por w_x, w_y, w_z y una deformación caracterizada por ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz} y γ_{yz}. Cortes por planos paralelos a los coordenados *xz* e *yz* pondrían de manifiesto el significado del resto de las componentes. Consideraremos positivas a las deformaciones a que dan lugar tensiones positivas.

<u>Caso plano</u>

A partir de ahora nos dedicaremos a estudiar los fenómenos elásticos casi exclusivamente en el plano. Ésto, además de simplificar mucho el análisis, contempla los casos de interés a considerar en la mayor parte de las estructuras de la edificación.

Si el elemento que estamos considerando se encuentra en el plano xy, las ecuaciones de equilibrio (1) se reducen a :

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + f_x = 0$$
$$\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + f_y = 0 \qquad (1')$$

las condiciones de contorno (2) a :

$$T_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$
$$T_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \qquad (2')$$

y la deformación quedará caracterizada por la parte correspondiente al plano, de las ecuaciones (3):

$u = \varepsilon_x \, dx + \gamma_{xy} dy$
$v = \gamma_{xy} \, dx \quad \varepsilon_y \, dy \qquad (3')$

<u>Circulo de Mohr</u>

Las ecuaciones (2') nos dan las componentes x e y de la tensión que actúa sobre cualquier plano perpendicular a la placa que la corta en ese punto, siempre que ahí se conozcan σ_x, τ_{xy}, σ_y. Tiene mayor interés conocer las componentes perpendicular Tn (tensión normal al corte) y la que actúa en el sentido del corte T_τ (tensión tangencial o cortante). Así, por ejemplo, mientras que, como hemos visto en el ejercicio anterior, las componentes de la tensión eran $(T_x \; T_y \; T_z) = (2.5 \quad 3 \quad \sqrt{3})$ la tensión normal al plano considerado sería $(2.5 \; 3 \; \sqrt{3}).(0 \; 2/4 \; \sqrt{3}/2) = 3$, producto escalar del vector tensión por el versor perpendicular al plano. Y la tensión cortante podría obtenerse, por ejemplo, mediante el teorema de Pitágoras, $T_\tau = \sqrt{|T|^2 - |T_n|^2} = \sqrt{2.5^2+3^2+(\sqrt{3})^2-3^2} = 3.04$. A continuación deduciremos un método gráfico que permite ver como varían T_n y T_τ cuando varía la orientación del plano por el que hemos cortado la placa.

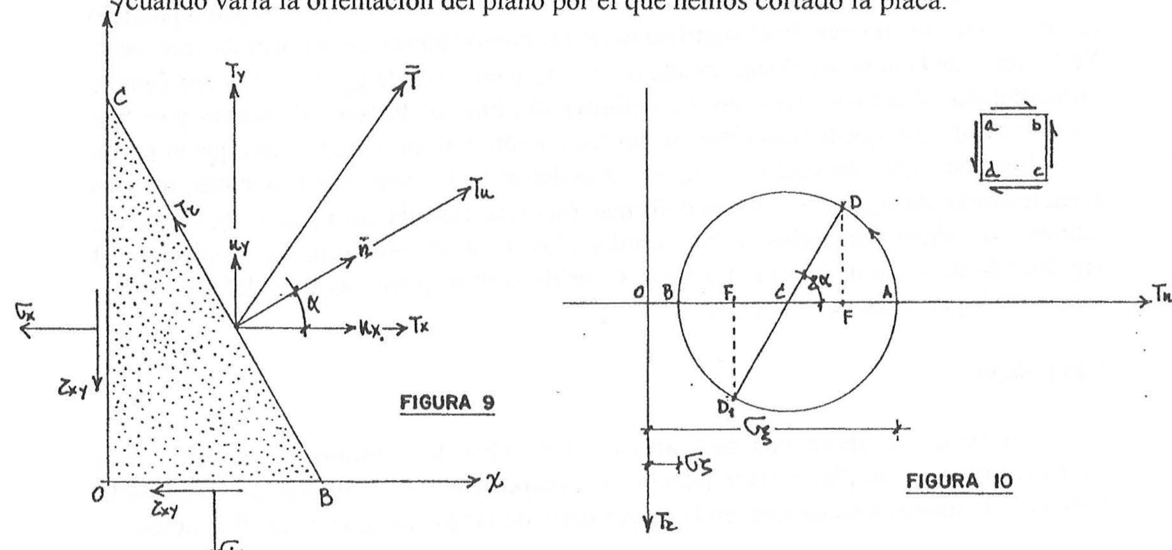


FIGURA 9

FIGURA 10

En la *figura 9*, *BC* representa el plano perpendicular al *xy*, cercano a *O*, por el que hemos dado el corte a la placa. El versor perpendicular a ese plano, **n,** forma un ángulo α con el eje x. Podemos escribir el equilibrio en dos direcciones, una paralela al plano *BC* y otra perpendicular a él :

$T_n = T_x \cos\alpha + T_y \operatorname{sen}\alpha$
$T_\tau = T_y \cos\alpha - T_x \operatorname{sen}\alpha$, y empleando las ecuaciones (2')

$T_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
$T_\tau = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \tau_{xy}\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}2\alpha \qquad (4)$

Existe un ángulo para el cual $T_\tau = 0$. Si igualamos a cero la segunda de las ecuaciones (4) :

$\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y) = ½(\text{sen}2\alpha/\cos2\alpha) = ½\tan2\alpha$; $\rightarrow \tan2\alpha = \tau_{xy}/ (½(\sigma_x-\sigma_y))$. Podemos comprobar que ese ángulo coincide con el que da los valores máximo y mínimo de T_n. Derivando respecto a α la primera de las ecuaciones (4) e igualando a cero :

$\partial T_n/\partial\alpha= -2\sigma_x\cos\alpha\,\text{sen}\alpha + 2\sigma_y\text{sen}\alpha\cos\alpha+2\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=\text{sen}2\alpha(\sigma_y-\sigma_x) + 2\tau_{xy}\cos2\alpha=0$; $\rightarrow \tan2\alpha = \tau_{xy}/ (½(\sigma_x-\sigma_y))$, como queríamos demostrar.

Además si $T_\tau = \tau_{xy}\cos2\alpha + ½(\sigma_y - \sigma_x)\text{sen}2\alpha$ es cero, también lo será $\tau_{xy}\cos2(\alpha+90) + ½(\sigma_y - \sigma_x)\text{sen}2(\alpha+90)=- \tau_{xy}\cos2\alpha - ½(\sigma_y - \sigma_x)\text{sen}2\alpha=-T_\tau$.

Vemos por tanto que la tensión tangencial es cero en dos direcciones perpendiculares, que designaremos como direcciones principales y llamaremos σ_ξ y σ_ζ a los valores de la tensión normal según esas dos direcciones. Entonces, si comenzamos a medir los ángulos α a partir de una de esas dos direcciones, la que esté sometida a una tensión normal mayor, σ_ξ por ejemplo, de (4) deducimos que :

$T_n =\sigma_\xi\cos^2\alpha + \sigma_\zeta\text{sen}^2\alpha$;
$T_\tau = ½(\sigma_\xi-\sigma_\zeta)\text{sen}2\alpha$; (4')

Si ponemos $\sigma_\xi = ½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta) + ½(\sigma_\xi - \sigma_\zeta)$, $\sigma_\zeta = ½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta) - ½(\sigma_\xi - \sigma_\zeta)$, podremos escribir las anteriores ecuaciones (4')

$T_n = (½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta) + ½(\sigma_\xi - \sigma_\zeta))\cos^2\alpha + (½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta) - ½(\sigma_\xi - \sigma_\zeta))\text{sen}^2\alpha$;
$T_\tau = ½ (\sigma_\xi-\sigma_\zeta)\text{sen}2\alpha$;

$T_n= ½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta)(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha) + ½(\sigma_\xi(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha) - \sigma_\zeta(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha))$;
$T_\tau = ½(\sigma_\xi-\sigma_\zeta)\text{sen}2\alpha$;

$T_n= ½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta) + (\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)\, ½(\sigma_\xi-\sigma_\zeta)=½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta)\cos2\alpha$;
$T_\tau = ½(\sigma_\xi-\sigma_\zeta)\text{sen}2\alpha$; Podemos pues escribir las ecuaciones (4') de forma :

$T_n = ½(\sigma_\xi+\sigma_\zeta)\cos2\alpha$;
$T_\tau = ½(\sigma_\xi-\sigma_\zeta)\text{sen}2\alpha$; (5)

Estamos ahora en condiciones de obtener una representación gráfica de la variación de T_n y T_τ cuando cambia el ángulo α del plano. A cada ángulo corresponde un punto en el diagrama de la *figura 10* cuyas coordenadas representan los valores de T_n y T_τ correspondientes. Los puntos *A* y *B* de abcisas σ_ξ y σ_ζ respectivamente, corresponden a los planos perpendiculares a las direcciones principales. De las fórmulas (5) se deduce que las componentes de la tensión correspondientes a un plano cualquiera *BC* que forme un ángulo α (*figura 9*), están representadas por las coordenadas de un punto situado en una circunferencia de diámetro $(\sigma_\xi - \sigma_\zeta)$. Para hallar ese punto basta con medir a partir de σ_ξ, en el sentido de crecimiento de los ángulos α de la *figura 9*, un arco que abarque un ángulo igual a 2α. Para obtener la coincidencia de signo de la componente tangencial, llevaremos los τ positivos hacia abajo y consideraremos los esfuerzos tangenciales como positivos cuando el sentido de rotación del par que originan es contrario al movimiento de las agujas del reloj, como ocurre para las caras *bc* y *ad* del elemento *abcd* en la *figura 10*.

Al girar el plano *BC* alrededor de un eje perpendicular al plano *xy* (*figura 9*) en el sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo α varía de 0 a $\pi/2$ y el punto *D* en la *figura 10* se mueve de σ_ξ a σ_ζ de forma que la semicircunferencia superior nos da la variación de la tensión para los valores de α comprendidos entre esos límites. La semicircunferencia inferior da las tensiones para $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$. Prolongando el radio *CD* hasta el punto D_1 (*figura 10*) es decir tomando el ángulo $\pi + 2\alpha$ en lugar de 2α se obtienen las tensiones correspondientes al plano perpendicular a *BC* (figura 9). Se ve así que las tensiones tangenciales que actúan sobre dos planos perpendiculares entre sí, son iguales en valor absoluto, cosa que ya habíamos demostrado. En lo que se refiere a las tensiones normales, vemos en la figura que $OF_1 + OF = 2OC$, es decir, la suma de las tensiones normales correspondientes a planos perpendiculares entre sí permanece constante al variar α.

La tensión tangencial máxima viene dada en el diagrama (figura 10) por la máxima ordenada de la circunferencia, o lo que es lo mismo por su radio. Tenemos entonces $\tau_{max} = ½(\sigma_\xi - \sigma_\eta)$. Dicha tensión actúa sobre el plano bisector del ángulo formado por las tensiones principales.

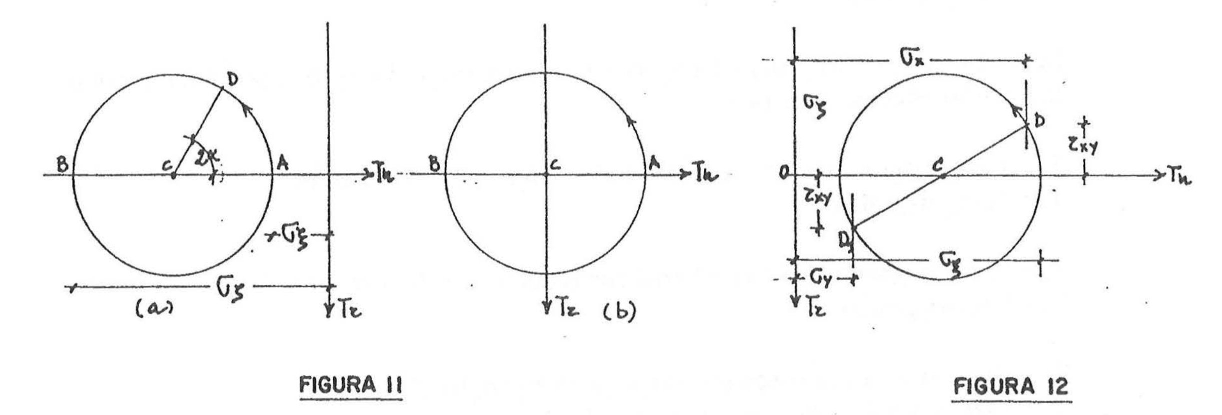


FIGURA 11

FIGURA 12

El diagrama puede utilizarse también en el caso de que una o las dos tensiones principales son negativas (compresión). Basta solamente con cambiar el signo de la abcisa para las tensiones negativas. La *figura 11a* representa el caso en que ambas tensiones principales son negativas y la *figura 11b* el de esfuerzo cortante puro.

De la *figura 10* se deduce también el modo de obtener las tensiones principales, si se conocen las componentes de la tensión σ_x, σ_y, τ_{xy}, correspondientes a dos planos perpendiculares entre sí (*figura 9*). En tal caso se comienza dibujando los puntos *D* y *D1* que representan las tensiones que actúan sobre los dos planos coordenados (*figura 12*). De esta forma se obtiene el diámetro DD_1 del círculo. Construido el círculo, las tensiones principales σ_ξ yσ_ζ vienen dadas por su intersección con el eje de abcisas. De la figura se deduce :

$$\sigma_\xi = OC+CD= ½(\sigma_x+\sigma_y) + \sqrt{½(\sigma_x-\sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\ ;$$
$$\sigma_\zeta = OC-CD= ½(\sigma_x+\sigma_y) - \sqrt{½(\sigma_x-\sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\ ;$$

En cuanto a la tensión tangencial máxima viene dada por el radio del círculo, es decir :

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\zeta)=\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}}$;

De esta forma todas las características del estado tensional en un punto pueden obtenerse conociendo tan solo las tres componentes σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Por último, en lo que se refiere a la aplicación del círculo de Mohr al análisis de tensiones, observemos que cualquier estado tensional puede descomponerse en uno de compresión o tracción puras mas otro de cortante puro (*figura 13*)

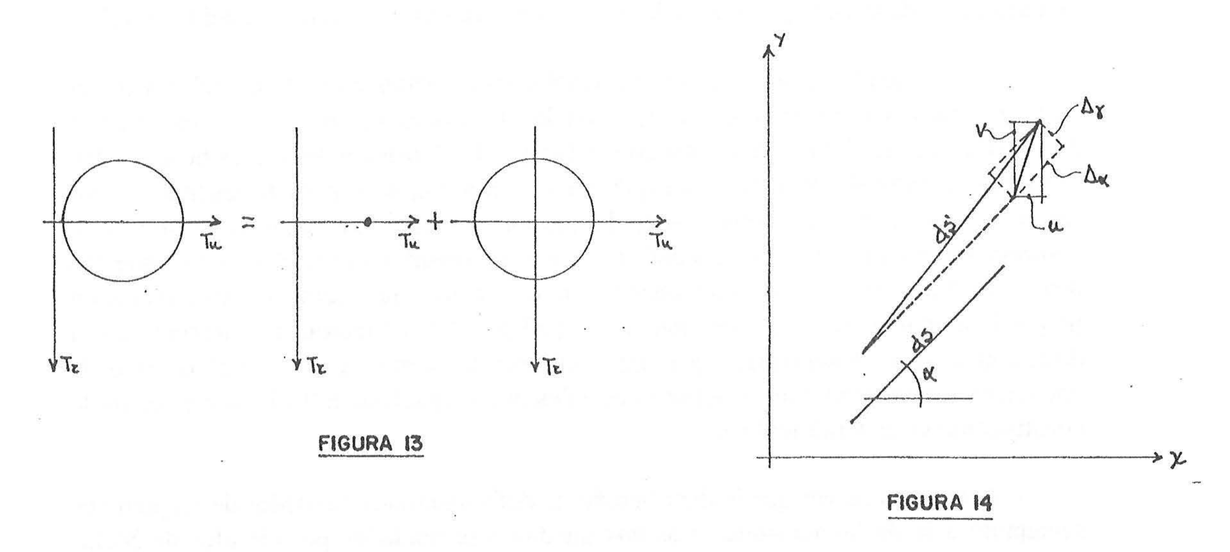


FIGURA 13

FIGURA 14

También la distribución de deformaciones alrededor de un punto puede ser representada por un círculo de Mohr. En la *figura 14* se representa un elemento lineal ds antes y ds' después de sufrir una deformación. De modo análogo a como hicimos en el caso de las tensiones tratamos de ver cual es el estado de deformación alrededor de un punto, esto es, nos interesa conocer la deformación unitaria ε y la transversal γ en una dirección cualquiera.

$$\varepsilon = \Delta_\alpha/ds = (u\cos\alpha+v\,\text{sen}\alpha)/ds=((\varepsilon_x dx+\gamma_{xy}dy)\cos\alpha + (\gamma_{xy}dx + \varepsilon_y dy)\text{sen}\alpha)/ds=$$
$$=\varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\text{sen}^2\alpha +2\gamma_{xy}\text{sen}\alpha\cos\alpha ;$$

$$\gamma = \Delta\gamma/ds = (-u\,\text{sen}\alpha+v\cos\alpha)/ds= (-(\varepsilon_x dx+\gamma_{xy}dy)\text{sen}\alpha + (\gamma_{xy}dx+\varepsilon_y dy)\cos\alpha)/ds=$$
$$=-\varepsilon_x\text{sen}\alpha\cos\alpha-\gamma_{xy}\text{sen}2\alpha+\gamma_{xy}\cos2\alpha+\varepsilon_y\text{sen}\alpha\cos\alpha=$$
$$=(\varepsilon_y-\varepsilon_x)\text{sen}\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha) =\gamma_{xy}\cos2\alpha + \frac{1}{2} (\varepsilon_y-\varepsilon_x)\text{sen}2\alpha;$$

$$\varepsilon=\varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\text{sen}^2\alpha +2\gamma_{xy}\text{sen}\alpha\cos\alpha ;$$
$$\gamma=\gamma_{xy}\cos2\alpha + \frac{1}{2} (\varepsilon_y-\varepsilon_x)\text{sen}2\alpha; \qquad (6)$$

Las ecuaciones (6) son semejantes a las ecuaciones (4). No cambian más que en haber sustituido ε por T_n, γ por T_τ, ε_x por σ_x, ε_y por σ_y y γ_{xy} por τ_{xy}. Así pues, todo lo que

hayamos demostrado para las tensiones podrá aplicarse también a las deformaciones incluyendo la construcción gráfica de Mohr.

Ley de Hooke

La relación entre las componentes de la tensión y de la deformación, ha sido establecida experimentalmente y se conoce bajo el nombre de *ley de Hooke.*

Imaginemos un paralelepípedo rectangular infinitésimo, con sus aristas paralelas a los ejes coordenados, sometido a la acción de una tensión normal σ_x distribuida uniformemente sobre dos caras opuestas. La magnitud de la deformación longitudinal unitaria viene dada por $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ en la que E es el *módulo de elasticidad* del material.

Una generalización de la ley de Hooke en el plano consiste en relacionar las deformaciones del material ε_x, ε_y, τ_{xy}, con las tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy}. La experiencia demuestra que en el caso de un material isótropo, las tensiones normales no producen distorsión angular del elemento, así que tanto ε_x como ε_y solo podrán depender de los valores de σ_x y σ_y. Ya hemos visto la proporción que hay entre la tensión y la deformación en una dirección. La deformación transversal del paralelepípedo a que nos hemos referido antes, está relacionada con la tensión que actúa en una dirección perpendicular mediante la expresión $\varepsilon_y = -(\nu/E)\sigma_x$. La dilatación del elemento en la dirección *x* viene acompañada por una contracción lateral. "ν" recibe el nombre de coeficiente de Poisson. Para muchos materiales puede igualarse a 0.25. Para el acero de construcción es generalmente 3.

Acabamos de ver que la distribución de deformaciones alrededor de un punto es semejante a la de las tensiones. Las dos quedan representadas por círculos de Mohr. Además hemos admitido que para un material isótropo no existen deformaciones transversales cuando está sometido a una tensión de tracción o compresión simples, esto es, sometido a una tensión tangencial nula. Hemos demostrado también el hecho de que todo estado tensional es la suma de uno de compresión o tracción simples más otro de cortante puro (*figura 13*). Por tanto el estado de cizalladura pura corresponderá al tensional de cortante puro : $2\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$. En la *figura 15 b*) se presenta el esquema de un ensayo de cizalladura que refleja el significado de la constante G

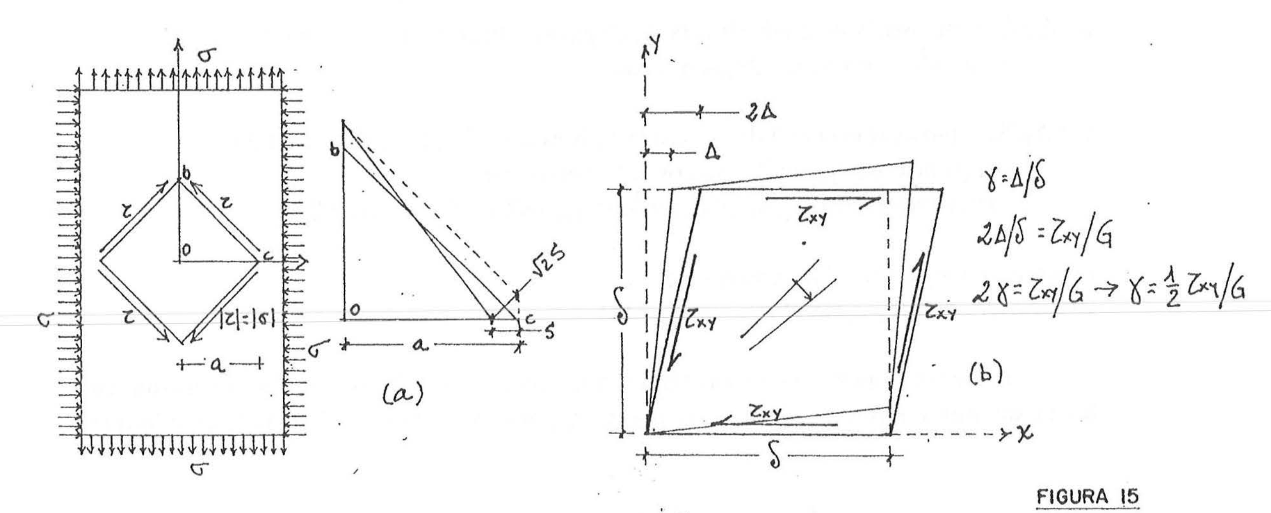


FIGURA 15

A continuación demostraremos que aunque la generalización de la ley de Hooke nos lleva a pensar en una nueva constante de elasticidad G que relacionara γxy con τxy, ésta no es más que una combinación de E y ν.

De la *figura 11 b)*, que muestra el círculo de Mohr de un estado tensional de esfuerzo cortante puro, se deduce que éste está producido por dos tensiones normales de igual magnitud, una positiva (tracción) y otra negativa (compresión), actuando en dos planos perpendiculares. Así pues, en este caso, $\tau = \sigma$. En la *figura 15 a)* se describe la relación que hay entre γ y ε :

$\gamma = (\sqrt{2}s)/(\sqrt{2}a) = s/a = \varepsilon = \sigma/E + (\nu/E)\sigma = (\sigma/E)(1+\nu) = ½\ \tau/G$;
como $\sigma = \tau$;$\rightarrow$ $G = E/(2(1 + \nu))$;

En la descripción que hemos hecho de la relación que existe entre tensiones y deformaciones nos hemos referido únicamente al plano. Volvamos al espacio de tres dimensiones. Si el material es isótropo lo que hemos descrito para el plano *xy* resulta igualmente válido para los planos *xz* e *yz* y la relación entre las tensiones y las deformaciones es la siguiente :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sigma_x/E - \nu(\sigma_y/E) - \nu(\sigma_z/E) ;\\
\varepsilon_y &= -\nu(\sigma_x/E) + \sigma_y/E - \nu(\sigma_z/E) ;\\
\varepsilon_z &= -\nu(\sigma_x/E) - \nu(\sigma_y/E) + \sigma_z/E ; \qquad (7)\\
\gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G ;\\
\gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G ;\\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G ;
\end{aligned}$$

E = módulo de elasticidad ; ν = módulo de Poisson ;
G = módulo de rigidez = $E/(2(1 + \nu))$.

Despejando los valores de σ_x ,σ_y .....obtenemos, en forma matricial :

$$\begin{vmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{vmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{vmatrix}$$

A continuación vamos a ver como se reducen esas expresiones en algunos casos. En la *figura 16 a)* se muestra una barra sometida a un estiramiento longitudinal. En este caso $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; $\sigma_x = E\varepsilon_x$.

En la *figura 16 b)*se muestra un caso de tensión plana. Se trata de una placa sometida a esfuerzos en los bordes. En este caso $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ y

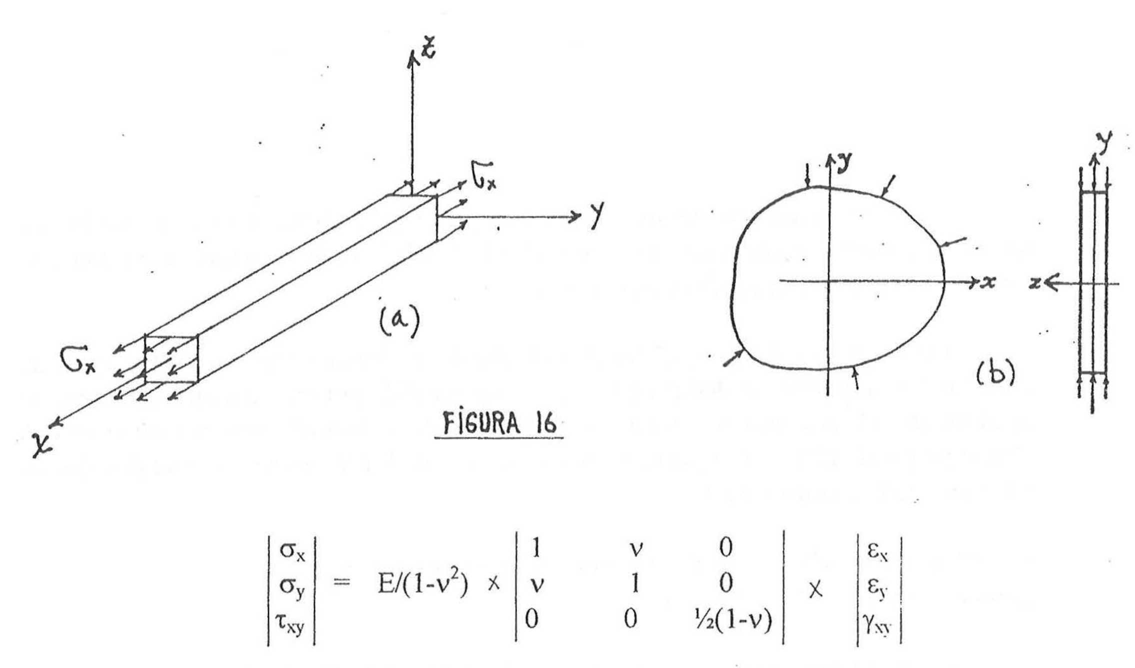


FIGURA 16

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = E/(1-\nu^2) \times \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2}(1-\nu) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$

Obsérvese que en al caso de *tensión plana* las tensiones están contenidas en el plano del cuerpo considerado, que aunque tendrá un cierto grosor, la variación de las tensiones a lo largo de éste es nula. Para obtener una idea más precisa de lo que estamos hablando, comparemos el estado de *tensión plana* con el de *deformación plana* que estudiamos a continuación. Existen muchos problemas importantes que son de este tipo : muro de contención sometido a una presión lateral, túnel o alcantarilla, tubo cilíndrico sometido a una presión interna, rodillo cilíndrico comprimido por fuerzas contenidas en el plano diametral como en el caso de un cojinete de rodillos. En este estado el mismo cuerpo está confinado entre dos planos (*figura 17*) y no es libre de "respirar" $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$, y

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = (1+\nu)(1-2\nu)/E \times \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{2}(1-2\nu) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$

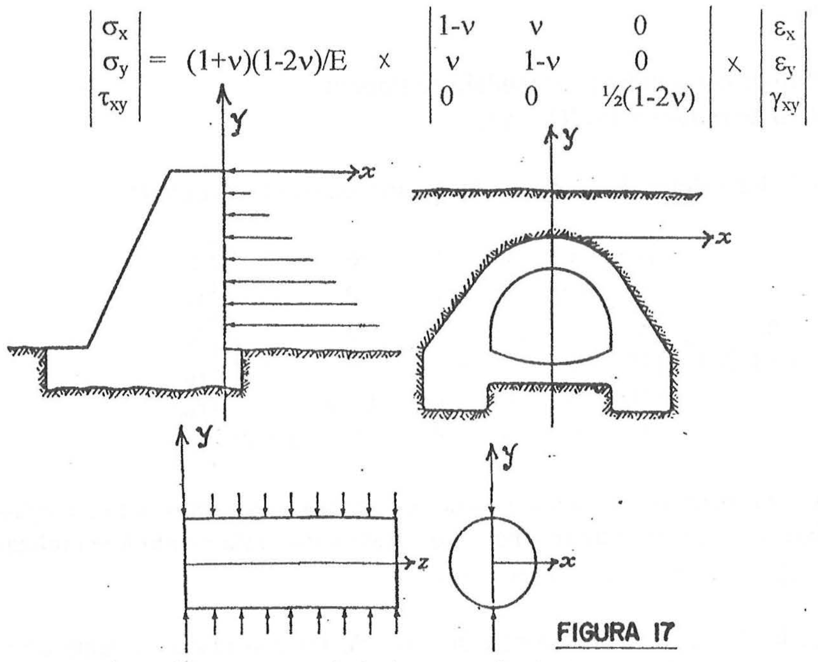


FIGURA 17

A continuación vamos a deducir, a partir de las ecuaciones (7) las ecuaciones correspondientes al estado de *tensión plana*. Los casos de *deformación plana* como el

que trata el estado elástico en tres dimensiones seguirán razonamientos parecidos, aunque no se oculta la mayor complicación de este último.

$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$;$\rightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = ½\, E/(1+\nu)\, \gamma_{xy}$
$\varepsilon_x = \sigma_x/E - \nu(\sigma_y/E)$;
$\varepsilon_y = -\nu(\sigma_x/E) + \sigma_y/E$; y en forma matricial

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \times \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{vmatrix}$$ que en forma simbólica queda : $\{\varepsilon\} = 1/E[\nu]\{\sigma\}$

A continuación invertimos la matriz $[\nu]$, para lo que primero hallamos el determinante, $|\nu| = 1 - \nu^2$, y después la matriz de adjuntos : $\begin{vmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix}$

$$[\nu]^{-1} = E/(1-\nu^2) \times \begin{vmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix}$$

De donde se deduce :

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{vmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \times \begin{vmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{vmatrix}$$

e incluyendo el valor de τ_{xy}

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = E/(1-\nu^2) \times \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ½(1-\nu) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$

Ecuaciones de compatibilidad

El problema de la teoría de la elasticidad consiste, en general, en determinar el estado tensional que se origina en un cuerpo sometido a la acción de determinadas fuerzas. Es necesario para ello resolver las ecuaciones diferenciales de equilibrio (1) y la solución a de ser tal, que satisfaga las ecuaciones de contorno (2). En el caso de problemas bidimensionales (ecuaciones 1'), por ejemplo, dichas ecuaciones contienen las tres componentes σ_x, σ_y, τ_{xy} no bastando para la determinación de las mismas. El problema es estáticamente indeterminado y para su solución es necesario considerar la deformación elástica del cuerpo. Las ecuaciones de compatibilidad las obtenemos observando primero que $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$, $\varepsilon_y = \partial v/\partial y$, $\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$, dependen únicamente de u y v y por tanto no pueden ser independientes entre si. Su relación la obtenemos derivando :

$$\partial^2\varepsilon_x/\partial y^2 + \partial^2\varepsilon_y/\partial x^2 = \partial^2\gamma_{xy}/\partial x\partial y \,;$$

y sustituyendo los valores de ε_x, ε_y, γ_{xy} obtendríamos, mediante un procedimiento bastante laborioso que el lector puede encontrar en cualquier libro de elasticidad teórica, la ecuación de compatibilidad en función de las tensiones :

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(\sigma_x + \sigma_y) = (-1/(1-\nu))(\partial f_x/\partial x + \partial f_y/\partial y) ;$$

En tres dimensiones, las ecuaciones de compatibilidad, serían seis y se obtendrían de modo análogo.

Función de tensión

Hemos visto como para resolver los problemas de elasticidad basta con hallar soluciones de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que satisfagan las ecuaciones de compatibilidad y las condiciones de contorno. Si aplicamos esto en primer lugar al caso en que la única fuerza másica es el peso del cuerpo, las ecuaciones que habría que resolver en el caso de dos dimensiones son las de equilibrio:

$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0$
$\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \rho g = 0$ (a) en las que ρ es la densidad y g la aceleración de la gravedad, y la ecuación de compatibilidad :

$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (b) a las cuales se deberá añadir las condiciones de contorno (2').

El método corriente para resolver estas ecuaciones se basa en la introducción de una nueva función llamada función de tensión. Fácilmente se comprueba que las ecuaciones (a) quedan satisfechas por una función $\phi(x,y)$ relacionada con las componentes de la tensión por medio de las expresiones siguientes :

$$\sigma_x = \partial^2\phi/\partial y^2 - \rho g y ; \quad \sigma_y = \partial^2\phi/\partial x^2 - \rho g y ; \quad \tau_{xy} = -\partial^2\phi/\partial x\partial y ; \quad (c)$$

De esa manera podremos obtener diversas soluciones para las ecuaciones de equilibrio (a), entre las cuales, aquella que satisfaga la ecuación de compatibilidad (b) será la verdadera. Sustituyendo en la ecuación (b) las expresiones (c) de las componentes del esfuerzo concluimos que la función de tensión es la solución de la ecuación :

$$\underline{\partial^4\phi/\partial x^4 + 2\partial^4\phi/\partial x^2\partial y^2 + \partial^4\phi/\partial y^4 = 0} ; \quad (d)$$

Resolver un problema de elasticidad en dos dimensiones, en el cual sea el peso la única fuerza másica, consiste pues, tan solo, en buscar una solución de la ecuación (d) que satisfaga la condición de contorno correspondiente al caso particular planteado. A continuación se aplica para resolver una serie de problemas de interés práctico.

Ejemplos : todos los ejemplos se refieren a una placa cargada de modos diversos en su contorno. Para cada uno de ellos se ha elegido una función de tensión que satisfaga la ecuación (d). A continuación, a partir de esa función, se hallan las expresiones de σ_x, σ_y, τ_{xy} y su valor en el contorno de la placa. En cada figura se representa la carga a que debe estar sometida la placa para que los valores obtenidos de σ_x, σ_y, τ_{xy} correspondan a la solución del problema elástico.

a) (*figura 18 a*) $\phi = ax^2 - bxy + cy^2$; $\rightarrow \sigma_x = 2c$, $\sigma_y = 2a$, $\tau_{xy} = b$;

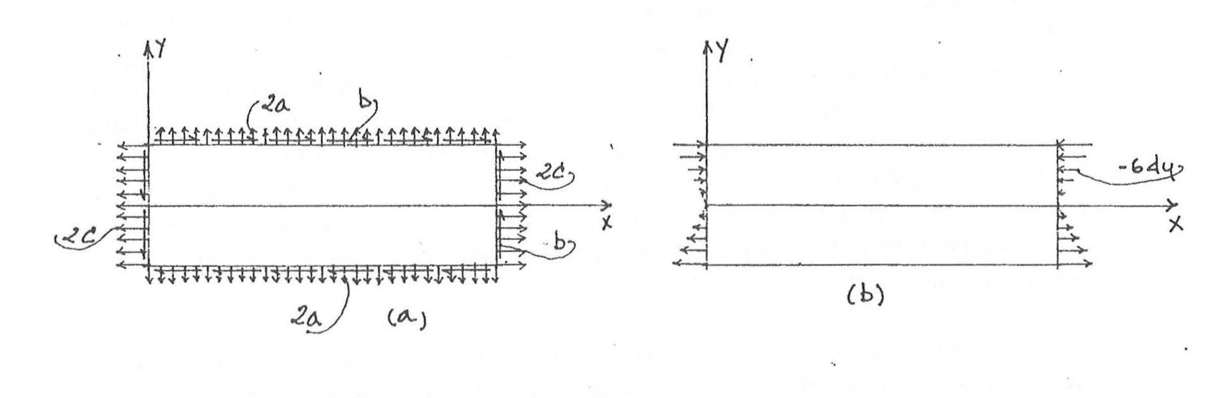
b) (*figura 18 b*) $\phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 - dy^3$;$\rightarrow \sigma_x = 2cx - 6dy$, $\sigma_y = 6ax - 2by$,
$\tau_{xy} = -2bx - 2cy$;
para $a = b = c = 0$;$\rightarrow \sigma_x = -6dy$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$;

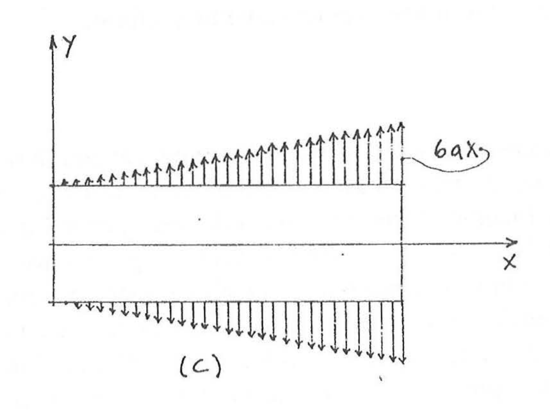
c) (*figura 18 c*) para $b = c = d = 0$;$\rightarrow \sigma_y = 6ax$, $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$;

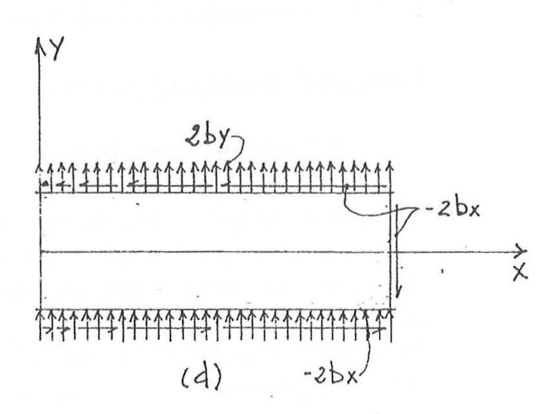
d) (*figura 18 d*) para $a = c = d = 0$;$\rightarrow \sigma_y = 2by$, $\tau_{xy} = -2bx$, $\sigma_x = 0$;

e) (*figura 18 e*) $\phi = axy3 + bxy$;$\rightarrow \sigma_x = 6axy$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = -3ay2 + b$. Corresponde a una ménsula cargada en un extremo y con una distribución de tensiones como se indica en la figura.

El lector puede, por su cuenta, tantear con otras expresiones de ϕ para obtener soluciones a problemas de su interés







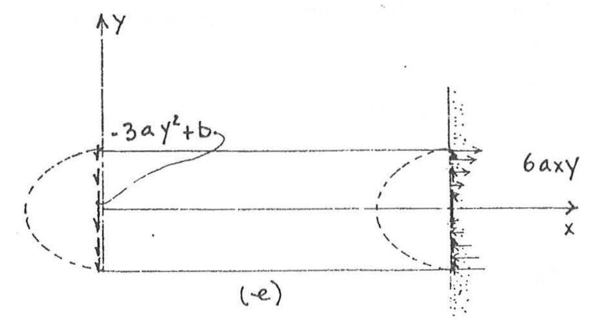


FIGURA 18

Principio de Saint-Venant.

Acabamos de estudiar distintos casos referentes a placas rectangulares y hemos llegado a soluciones exactas de las mismas mediante sencillas expresiones de la función ϕ. Estas soluciones satisfacen todas las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad pero su exactitud está condicionada a que las fuerzas en su contorno se distribuyan de una determinada forma. En el caso de la flexión simple del caso e), por ejemplo, el momento flector en el empotramiento debe estar producido por tracciones y compresiones con una variación lineal y la carga en el extremo deberá tener una distribución parabólica, como se indica en la figura.

La utilidad práctica de dicha solución, sin embargo no está limitada a caso tan especial sino que puede aplicarse con suficiente exactitud a casos de flexión en los que las condiciones en los extremos o los modos de aplicación de la carga no son rigurosamente satisfechas. Tal extensión en la aplicación de la solución se basa en el llamado *principio de Saint-Venant*. Este principio establece que si las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son remplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y estáticamente equivalente al anterior, la alteración que la nueva distribución de cargas induce en el antiguo estado tensional, aunque localmente importante, resulta despreciable a distancias grandes respecto a las dimensiones de la superficie sobre la cual han cambiado las fuerzas. Por ejemplo, en el caso de flexión simple de una barra cuyas dimensiones transversales son pequeñas comparadas con su longitud, la manera en que se aplique el momento flector exterior influye en la distribución tensional que se produce en la vecindad de los extremos, pero no en aquella correspondiente a secciones distantes, para las cuales coincide prácticamente con la dada por la solución a que se refiere la figura correspondiente al ejemplo e).

Lo mismo ocurre con los esfuerzos axiales. La distribución de tensiones depende de la forma en que se aplique la carga, solamente en las zonas próximas a los extremos. En las secciones alejadas la distribución de tensiones es prácticamente uniforme.

Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales es una formulación alternativa al equilibrio y su deducción para los distintos casos de problemas mecánicos comienza con la multiplicación por un parámetro o una función (según los casos) de una igualdad que sumada a otras, que han sido multiplicadas a su vez también por distintos parámetros o funciones, dan lugar a otra igualdad. Como las ecuaciones iniciales suelen expresar equilibrio, al ser multiplicadas por parámetros o funciones de movimiento, dan lugar a expresiones de trabajo. Vamos a aplicar ésto a las ecuaciones diferenciales de equilibrio (1). Multipliquemos cada una de ellas por una función arbitraria expresión del movimiento en los sentidos x, y, z, respectivamente, e integremos las expresiones en el volumen del cuerpo que estemos considerando

$$\int_v(\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z + f_x)u = 0 \;;$$
$$\int_v(\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z + f_y)v = 0 \;;$$
$$\int_v(\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z + f_y)w = 0 \;;$$

Sumando las tres igualdades :

$$\int_V[(\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y+\partial\tau_{xz}/\partial z+f_x)u+(\partial\tau_{xy}/\partial x+\partial\sigma_y/\partial y+\partial\tau_{yz}/\partial z+f_y)v+(\partial\tau_{xz}/\partial x+\partial\tau_{yz}/\partial y+\partial\sigma_z/\partial z+ f_y)w] = 0 \qquad (8)$$

u, v y w representan las componentes de un desplazamiento arbitrario.

A continuación integramos por partes los distintos términos. Primero a lo largo del eje x, los términos que incluyen derivadas respecto a x, y a continuación respecto a z e y los que incluyen derivadas respecto a z e y. En *la figura 19* se muestra un caso típico de integración por partes, el de expresiones con derivadas respecto a x. Aplicamos el procedimiento a la primera de las integrales. La integración en la dirección de los otros dos ejes puede interpretarse por analogía.

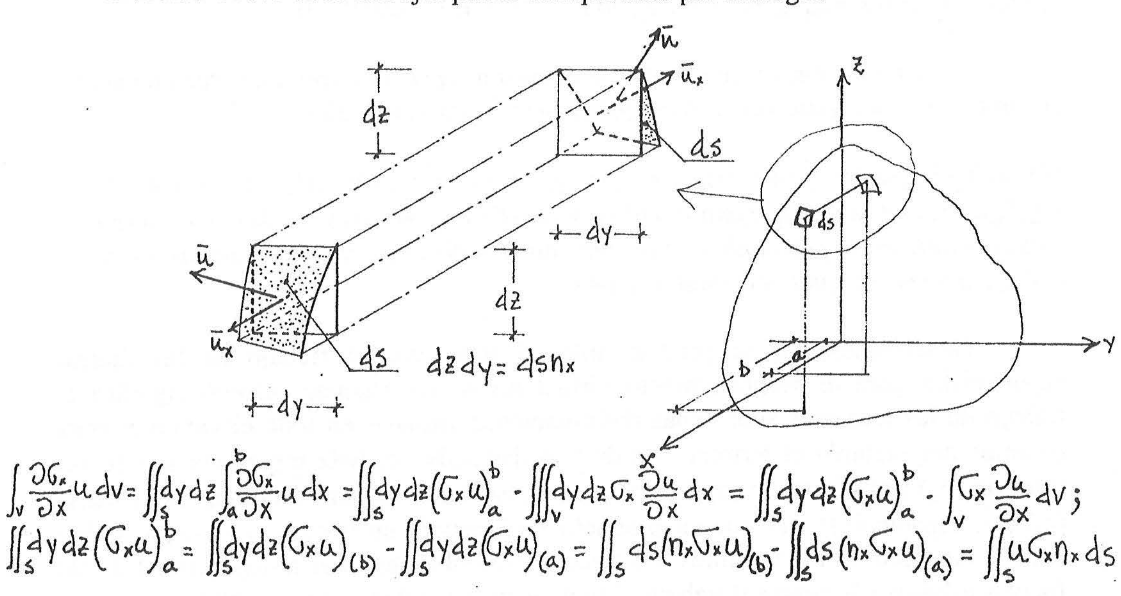


FIGURA 19

$$\int_V[(\partial\sigma_x/\partial x)u]dV = \int_S u\sigma_x n_x ds - \int_V\sigma_x(\partial u/\partial x)dV$$
$$\int_V[(\partial\tau_{xy}/\partial x)v]dV = \int_S v\tau_{xy} n_x ds - \int_V\tau_{xy}(\partial v/\partial x)dV$$
$$\int_V[(\partial\tau_{xz}/\partial x)w]dV = \int_S w\tau_{xz} n_x ds - \int_V\tau_{xz}(\partial w/\partial x)dV$$

$$\int_V[(\partial\tau_{xy}/\partial y)u]dV = \int_S u\tau_{xy} n_y ds - \int_V\tau_{xy}(\partial u/\partial y)dV$$
$$\int_V[(\partial\sigma_y/\partial y)v]dV = \int_S v\sigma_y n_y ds - \int_V\sigma_y(\partial v/\partial y)dV$$
$$\int_V[(\partial\tau_{yz}/\partial y)w]dV = \int_S w\tau_{yz} n_y ds - \int_V\tau_{yz}(\partial w/\partial y)dV$$

$$\int_V[(\partial\tau_{xz}/\partial z)u]dV = \int_S u\tau_{xz} n_z ds - \int_V\tau_{xz}(\partial u/\partial z)dV$$
$$\int_V[(\partial\tau_{yz}/\partial z)v]dV = \int_S v\tau_{yz} n_z ds - \int_V\tau_{yz}(\partial v/\partial z)dV$$
$$\int_V[(\partial\sigma_z/\partial z)w]dV = \int_S w\sigma_z n_z ds - \int_V\sigma_z(\partial u/\partial z)dV$$

Sumando estas ecuaciones, ordenando términos y añadiendo la contribución de las fuerzas másicas, obtenemos que la ecuación (8) queda convertida en :

$\int_s[(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)u +(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)v+(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)w]ds+$
$+\int_v[\sigma_x(\partial u/\partial x)+ \sigma_y(\partial v/\partial y)+ \sigma_z(\partial u/\partial z) +\tau_{xy}(\partial y/\partial x+\partial v/\partial y)+\tau_{xz}(\partial w/\partial x+\partial u/\partial z)+$
$\tau_{yz}(\partial w/\partial y+\partial y/\partial z)]dV + \int_v(f_x u+f_y v+f_z w)dV = 0;$

Y empleando las expresiones de las deformaciones en función de los movimientos, la ecuación (8) queda como :

$\int_s[(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)u +(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)v+(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)w]ds+$
$+\int_v(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})dV + \int_v(f_x u+f_y v+f_z w)dV = 0;$

Y por último, las ecuaciones (8) podremos ponerlas de la forma :

$\int_v[(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)u +(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)v+(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)u]ds+$
$+\int_s(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})dV + \int_v(f_x u+f_y v+f_z w)dV = 0;$

Teniendo en cuenta en cuenta las ecuaciones (2) que expresan las condiciones de contorno e incluyendo el caso de que existan fuerzas puntuales :

$\int_s(T_x u+T_y v+T_z w)ds + \int_v(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz})dV+\int_v(f_x u+f_y v+f_z w)dV +$
$+\sum(P_{ix}u+P_{iy}v+P_{iz}w) =0$ que expresa el principio de los trabajos virtuales : *Un cuerpo está en equilibrio si para todo desplazamiento virtual cinemáticamente admisible el trabajo interno es igual al trabajo externo.*

Observemos que la primera integral reproduce el trabajo de las fuerzas superficiales para el desplazamiento virtual u,v,w. La segunda integral significa el trabajo de las tensiones sobre unas deformaciones virtuales en todo el volumen, pues cojamos por ejemplo el término $\sigma_x\varepsilon_x dv = \sigma_x dydz\varepsilon_x dx$: $\sigma_x dydz$ representa una fuerza (tensión (σ_x) por superficie (dydz)) y $\varepsilon_x dx$ representa un espacio (deformación unitaria (ε_x) por espacio(dx)), así que su producto representará un trabajo. Lo mismo puede decirse del resto de los términos. La tercera integral muestra el trabajo virtual de las fuerzas másicas y la cuarta el trabajo virtual de una serie de fuerzas puntuales.

El interés del principio de los trabajos virtuales radica fundamentalmente en su aplicación al análisis numérico de esfuerzos mediante métodos aproximados como es el de Ritz y su versión moderna, el *método de los elementos finitos*. Se sustituye el movimiento del continuo por un número finito (aunque pueda ser muy elevado) de movimientos compatibles con las ligaduras y se aplica el teorema de los trabajos virtuales. El método da lugar a un sistema de ecuaciones lineales que resuelve el ordenador, dando la solución al problema elástico.

Principio de superposición.

La solución del problema relativo a un cuerpo elástico dado, limitado por una superficie conocida y sometido a unas determinadas fuerzas másicas, exige la determinación de las componentes de la tensión, o de los desplazamientos, que satisfagan las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno. Si decidimos trabajar con las componentes de la tensión se deberá cumplir : a) las ecuaciones de equilibrio, b) las condiciones de compatibilidad, c). Sean $\sigma_x,\ldots,\tau_{xy}\ldots$, las componentes

de la tensión así determinadas, las cuales han sido producidas por las fuerzas superficiales X, Y, Z, y las fuerzas másicas f_x, f_y, f_z.

Si llamamos σ_x'...τ_{xy}',... a las componentes de la tensión producidas en el mismo cuerpo por las fuerzas superficiales X', Y', Z' y las fuerzas másicas f_x', f_y' f_z', las componentes $\sigma_x + \sigma_x$',...$\tau_{xy} + \tau_{xy}$',..., representarán las tensiones causadas por las fuerzas superficiales X + X',..., y las fuerzas másicas $f_x + f_x$'...Esto es así por ser lineales todas las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno. Añadiendo, de esta forma, la primera de las ecuaciones de equilibrio a la ecuación correspondiente :

$$\partial\sigma_x'/\partial x + \partial\tau_{xy}'/\partial y + \partial\tau_{xz}'/\partial z + f_x' = 0$$

se obtiene :

$$\partial(\sigma_x + \sigma_x')/\partial x + \partial(\tau_{xy} + \tau_{xy}')/\partial y + \partial(\tau_{xz} + \tau_{xy}')/\partial z + f_x + f_x' = 0$$

y análogamente de la primera de las ecuaciones de contorno se deduce :

$$X + X' = (\sigma_x + \sigma_x')n_x + (\tau_{xy} + \tau_{xy}')n_y + (\tau_{xz} + \tau_{xz}')n_z$$

Las condiciones de compatibilidad pueden combinarse también de la misma forma. El conjunto completo de ecuaciones, muestra que $\sigma_x + \sigma_x$',... $\tau_{xy} + \tau_{xy}$',..., satisfacen todas las ecuaciones y condiciones que determinan las tensiones producidas por las fuerzas X + X',..., $f_x + f_x$',... Este resultado constituye el *principio de superposición.*

Al deducir las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno, no hicimos ninguna distinción entre la posición y forma del elemento antes y después de aplicar la carga. De ello resulta, que nuestras ecuaciones y la conclusiones de ellas deducidas, son válidas solamente si los desplazamientos producidos en la deformación no afectan substancialmente la acción de las fuerzas exteriores. Existen casos, sin embargo, en los que es preciso tener en cuenta esa modificación. En este caso la justificación del principio de superposición, que acabamos de dar, falla. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de una viga sometida simultáneamente a una carga lateral y a otra carga, aplicada según su dirección longitudinal ; otros muchos ejemplos se presentan en el estudio de estructuras con paredes delgados. Decimos, en estos casos, que nos encontramos ante problemas de inestabilidad.

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

7.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/ijh/apuntes.html

